



TITLE:

# 渦輪の発生と衰え (連続体力学における非線型方程式の近似解法)

AUTHOR(S):

神部, 勉

---

CITATION:

神部, 勉. 渦輪の発生と衰え (連続体力学における非線型方程式の近似解法). 数理解析研究所講究録 1974, 218: 39-53

ISSUE DATE:

1974-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/105296>

RIGHT:

## 渦輪の発生と衰え

東大 宇宙研 神部 勉

## §1. はじめに

無限の自由空間での, *rotational motion* の最も簡単で, 典型的な例として, 渦輪 (*vortex ring*) がある。従来よく知られていることは, 粘性なし流体中での渦輪について, *ring* 状のゼロでない *vorticity* の *core* が, 自分のまわりにゼロ *vorticity* の流体の衣を着て, 一定の速度で進行するばあいについてはよく研究されている (たとえば, Batchelor [1, §7.2], Fraenkel [2], Norbury [3])。

流体に粘性があると, 状況はかなり異なってくる。その理論あるいは実験の方面からの研究は, それぞれ, Saffman [4] あるいは Maxworthy [5] によって試みられている。その著しい特徴は, 渦輪の大きさの増大とその移動速度の減衰である。このことと関連して, 渦輪の終状態の解析が与えられている。渦輪の大きさの増大の原

因は、渦度の粘性拡散である。言いかえると、渦輪が粘性によってまわりの流体を自分の中に取りこむ (entrain) ことによって成長し、したがってその運動体の mass が増大するため、速度が減衰する。この entrainment は粘性渦の特徴の1つに挙げる事ができよう。

近年, turbulent shear flow (jet, wake, etc.) の中に、渦構造あるいはある種の構造的性が認められることが指摘され、その構造・役割が注目されている。渦輪はこのような流れの1つの基本構造ないしは element と考えることもできよう。

§4 では、渦輪の生成と発達の様を数値シミュレーションによって追ってみた。渦輪の速度・エネルギー・循環・インパルス・大きさ等の時間変化を数値的に示すことができる。

渦輪の生成からその終状態までを把握してみようというのが本稿の目的である。

## §2. 局所的な渦度分布と遠方の速度場

まず最初に、縮まないう無限の流体中に、局所的な渦度分布があり、無限遠では流体は静止しているとして、遠方の速度場がどのように表わされるかを見てみよう。いわゆる

渦輪もこのような渦度分布をもった場であると言ったよいであらう。渦度場  $\omega$  が時間  $t$  および位置  $x$  の関数として与えられるとすると、速度場  $u(t, x)$  は次の式をみたす：

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times u &= \omega(t, x), \\ \nabla \cdot u &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Vortex lines が有限領域ですべて閉じていて、無限遠まで伸びていないか、あるいは渦度が指数関数的に無限遠に向って減少するばあいには、速度場は漸近的に次のように表わされる [1, § 2.9]：

$$u = \nabla \phi_1 + \nabla \phi_2 + \dots, \quad (2)$$

$$\phi_1 = \frac{1}{4\pi} (P \cdot \nabla) \frac{1}{r}, \quad (3)$$

$$\phi_2 = \sum_{i,j} A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r}, \quad (4)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} r &= |x|, \\ P &= \int P \, dV, \\ P &= \frac{1}{2} x \times \omega, \\ A_{ij} &= -\frac{1}{24\pi} \int p_i x_j \, dV. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$P$  は fluid impulse と呼ばれる量で、全運動量に等しく、したがって invariant である。このことは次のようにも

示せる:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{2} \int \mathbf{x} \times \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} dV,$$

$\boldsymbol{\omega}$  に関する Navier-Stokes 方程式より

$$\mathbf{x} \times \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla u^2 - 2 \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{u} + \nabla (\mathbf{x} \cdot \mathbf{q}) - \nabla \cdot \mathbf{x} \mathbf{q} + \nu \nabla^2 (\mathbf{x} \times \boldsymbol{\omega} - 2 \mathbf{u}),$$

$$\text{ただし } \mathbf{q} = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (\nabla \cdot \mathbf{A} \mathbf{B})_i = \frac{\partial}{\partial x_j} (A_j B_i),$$

を得る。したがって  $dP/dt$  の体積積分は表面積分で表わせるので,  $|\mathbf{u}| = o(r^{-1})$ ,  $|\boldsymbol{\omega}| = o(r^{-2})$  ならば  $dP/dt = 0$  となる。

(2) 式からわかるように,  $\mathbf{u}$  の遠方場は potential flow で近似でき,  $\phi_1$  は dipole 場を,  $\phi_2$  は quadrupole 場を表わす。

ここでの興味ある事実を指摘しておく。速度  $\mathbf{U}$  で運動している半径  $a$  の球の誘起する irrotational flow の potential は

$$\phi_* = \frac{1}{2} a^3 (\mathbf{U} \cdot \nabla) \frac{1}{r}$$

によって与えられることはよく知られている。ここで座標の原点は瞬時的な球の中心にとり,  $\phi_*$  は無限遠の流体に相対的な速度 potential を表わす。この  $\phi_*$  と漸近展開 (2) の主要項である  $\phi_1$  とを比較すると,  $a^3 \mathbf{U} / 2$  と  $P / 4\pi$  が対応することがわかる。したがって,

$$a^3 U = P/8\pi = \text{const} \quad (6)$$

を得る。いま、運動物体はまわりの流体と同一の流体からなる球であると仮定しよう、そしてその半径<sup>a</sup>が粘性効果のため  $\sqrt{\nu t}$  に比例して大きくなると仮定しよう。このとき

$$(6) \text{ より } U \propto (\nu t)^{-3/2} \quad (7)$$

を得る。すなわち、ある局所的な渦度分布があると、遠くの速度場はある‘かたまり’の流体がある速度で運動しているのと同様であり、そのかたまりが  $\sqrt{\nu t}$  に比例して成長すると、その速度は  $(\nu t)^{-3/2}$  で減衰する。また正の  $t$  に対して、

$$\int_t^\infty U dt = \text{有限}$$

であるから、そのかたまりの移動距離は有限である。実は viscous vortex ring がちょうどこのような場合であることを次に示そう。

### § 3. 渦輪の終状態

渦輪の終状態においては、流れ場を特徴づける Reynolds 数は減少し、Navier-Stokes 方程式の非線型項は粘性項にくらべて無視できるであろう。したがって、渦度を支配する方程式は

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \nabla^2 \omega \quad (8)$$

で与えられる。この式は次のような渦輪の解をもつことが知られてゐる [4, 6] :

円柱座標系において  $(x, \rho, \theta)$ ,

$$\left. \begin{aligned} \omega &= (0, 0, \omega), \\ \omega &= C_\omega \Omega(\xi), \\ \Omega &= \xi_\rho e^{-\xi^2/4}, \quad C_\omega = \pi^{3/2} I_0 / 16 (\nu t)^2, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= C_\nu (V_x, V_\rho, 0), \\ V_x &= \frac{1}{\xi^3} \left\{ \left( \frac{3\xi_x^2}{\xi^2} - 1 \right) \operatorname{erf} \frac{\xi}{2} + \frac{1}{4} \left[ (2+\xi^2) - (\xi^2+6) \frac{\xi_x^2}{\xi^2} \right] \xi e^{-\xi^2/4} \right\}, \\ V_\rho &= \frac{\xi_x \xi_\rho}{\xi^3} \left\{ \frac{3}{\xi^2} \operatorname{erf} \frac{\xi}{2} - \frac{(\xi^2+6)}{4\xi} e^{-\xi^2/4} \right\}, \\ C_\nu &= \pi^{3/2} I_0 / 2 (\nu t)^{3/2}, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\xi_x = x/\sqrt{\nu t}, \quad \xi_\rho = \rho/\sqrt{\nu t}, \quad \xi^2 = \xi_x^2 + \xi_\rho^2. \quad (11)$$

ここで,  $I_0$  は初期 ( $t=0$ ) に原点 ( $x=0$ ) に作用した impulsive force の大きさで, その方向を  $x$  方向にとっている。

この解を使って (5) で定義された  $P$  を求めると,

$$P = (P, 0, 0), \quad P = \pi^3 I_0. \quad (12)$$

を得る。従って, (9) の渦度分布は dipole 型の遠方場を主項にもつことがわかる。実際, (10) は  $\xi \rightarrow \infty$  で漸近的に dipole 場になる。前節でおこなった analogy に従うと,

この渦度分布はある速度で  $x$  方向に移動しているはずである。しかしながら, (9) で表わされる渦度分布の中心は静止しており, ただその広がりだけが  $\sqrt{\nu t}$  に比例して成長している。この矛盾は (8) 式で convection term が省略されていることに由来すると考えられる。

しかしながら, Saffman [4] によると, (9), (10) を使ってその移動速度を知ることができる。それを以下に示そう。静止流体中を速度  $U$  で移動している vortex ring に対して, 次の関係式がなりたつ:

$$2P \cdot U = E - J, \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ただし} \quad E &= \int \frac{1}{2} u^2 dV, \\ J &= \int (u - U) \cdot (x \times \omega) dV. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

現在考えているようなばあいでは, 渦度分布は非定常であって,  $U$  の unique な定義はないが, ここでは Saffman にならって次のように定義する:

$$\left. \begin{aligned} U &= (U, 0, 0), \\ U &= \frac{dX}{dt}, \\ X &= \frac{\pi}{P} \iint x \rho^2 \omega dx d\rho, \quad (P = \pi \iint \rho^2 \omega dx d\rho), \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$X$  は渦度分布の中心の  $x$  座標を意味する。



(10) を使うと

$$E = c_v^2 \int \frac{1}{2} (V_x^2 + V_p^2) dV = \frac{A}{4} \pi^4 I_0^2 (\nu t)^{-3/2}, \quad (16)$$

$$A = \iint (V_x^2 + V_p^2) \xi_p d\xi_p d\xi_x$$

を得る。Saffman [4] によると

$$J = \int (\mathbf{U} - \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{x} \times \boldsymbol{\omega}) dV = -6\pi \iint x \rho \omega u_p dx dp$$

と表わせる。(これを彼は Lamb's transformation と呼んでいる。) 従って (9) と (10) を使うと

$$J = -\frac{3B}{16} \pi^4 I_0^2 (\nu t)^{-3/2}, \quad (17)$$

$$B = \iint \xi_x \xi_p \Omega V_p d\xi_x d\xi_p$$

(12), (16), (17) を (13) に代入すると

$$U = \frac{4A+3B}{32} \pi I_0 (\nu t)^{-3/2} \quad (18)$$

を得る。A, B 共に正の数値定数であり,  $U \propto (\nu t)^{-1.5}$  が示された。これは前節での推測と一致する結果である。

Vortex ring は終状態では, まわりの流体を粘性によって取りこみながら, その大きさが  $\sqrt{\nu t}$  に比例して大きくなり, 従ってその mass が増大するので, 運動量一定を保証するように, その移動速度が  $t^{-1.5}$  に比例して減衰する。

#### §4. 渦輪生成の数値シミュレーション

渦輪の生成と発展を数値的に simulate する目的で次のような問題を設定する:

‘ $t=0$ で静止している流体中に、それを囲む壁の穴から、同じ流体をある有限時間 $T$ の間吹きこみ、それ以後は穴を閉じる、という条件のもとで、非定常の Navier-Stokes 方程式を数値的に解く’。

以下主にその結果だけを述べる。円柱座標  $(x, r, \theta)$  での渦度の角成分  $\omega$  と流れの関数  $\psi$  に関する方程式は

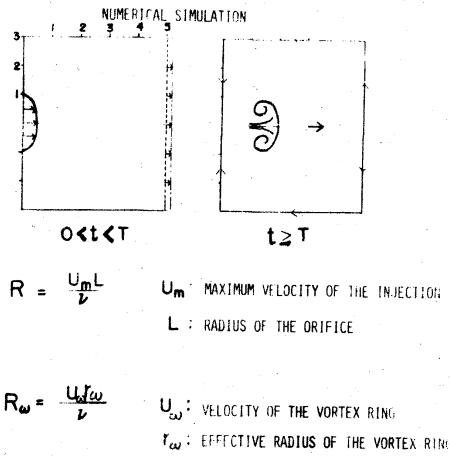
$$\omega_t + \psi_r \left( \frac{\omega}{r} \right)_x - \psi_x \left( \frac{\omega}{r} \right)_r = \frac{1}{R} \left( \omega_{xx} + \left( \frac{1}{r} (r\omega)_r \right)_r \right) \quad (19)$$

で与えられる。ここで、長さは吹き出し口の半径  $L$ 、速度は吹き出し最大速度  $U_m$  で無次元化してある。時間は  $L/U_m$  を単位としている。(19) 式を差分で近似するのであるが、その方法は Pearson [7] が2次元流に対しておこなった方法を軸対称のばあい拡張して使った。

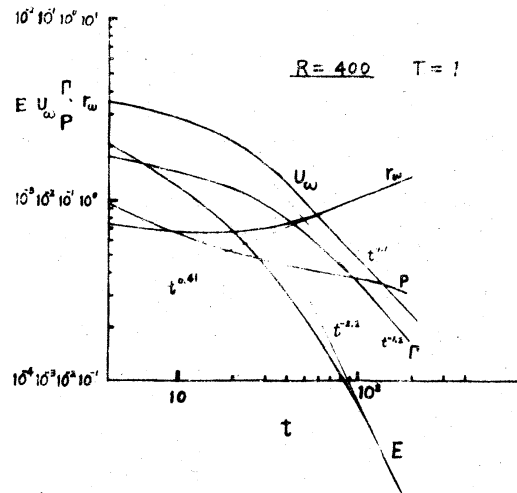
計算は半径3・軸長5の円柱状領域でおこなった(図1)。 $0 < t < T$ の間、半径1の円状の穴から流体が吹きこまれ、同時に連続の条件をみたすように、吹きこみと同じ flux で流体が右側へ流出する(1図左)。 $t \geq T$ では、左右の穴は閉じられ、境界上では速度の垂直成分および粘性

shear stress はゼロとする。このとき閉じた領域中で、吹きこまれた流体が Navier-Stokes 方程式に従って前進する様子が示されよう (1 図右)。1 図左右の図に対応して、2 つの Reynolds 数が定義される:  $R = U_m L / \nu$ ,  $R_\omega = U_\omega r_\omega / \nu$ 。後者は渦レイノルズ数と呼ぶことにする。 $U_\omega$  は (15) で定義された  $U$  と同じもので渦輪の進む速さ,  $r_\omega$  はその代表的大きさである。 $U_\omega$  は,  $R$  とともに値に依存するが、だいたい  $(10^{-1} \sim 10^{-2}) \times U_m$  であり,  $r_\omega \sim L$  である。

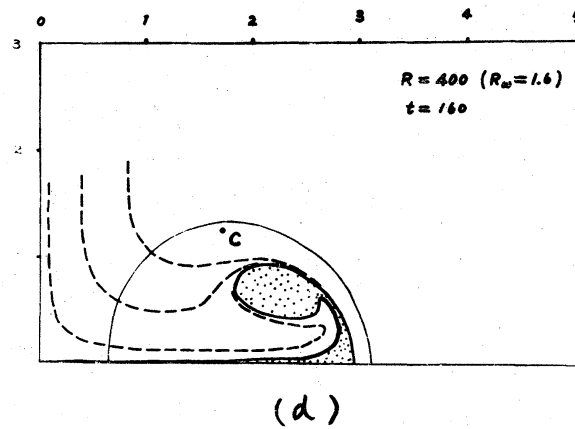
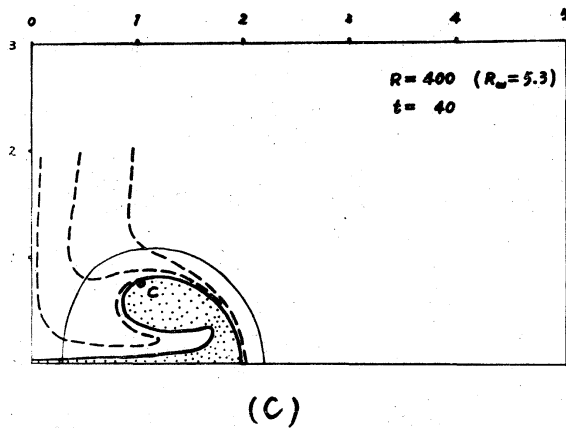
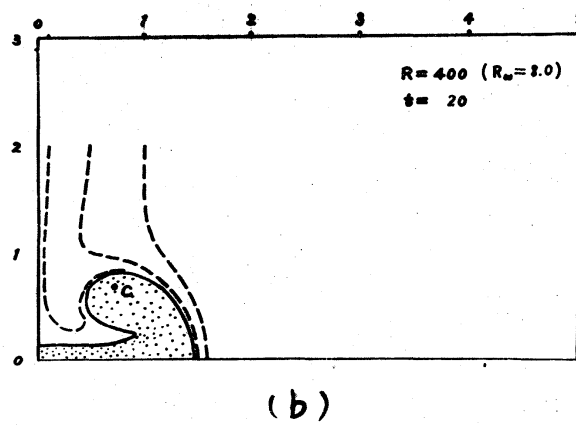
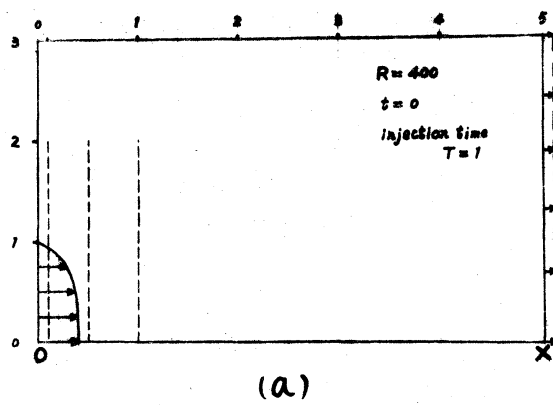
2 図 (a) ~ (d) は  $R = 400$ ,  $T = 1$  に対する結果で、それぞれ  $t = 0, 20, 40, 160$  に対応する。図に示された破線は実質線あるいは実質面 (流体粒子からなる線あるいは面) を表わす。 $OX$  は対称軸である。左の 0, 1 の間に矢印で示された分布曲線は吹きこみの速度分布を示す (2a 図)。  $t = 0$  で直線 (ないしは円形平面) であった実質が時間と共に変形する様子が示されている。1 番左の破線だけが渦輪の中に entrain されるのがわかる。点をうった部分は吹きこまれた流体自身を示す。点  $c$  は渦度分布の中心を示す。渦度中心は速度  $U_\omega$  で右へ移動する。半円形の曲線は,  $U_\omega$  の速度で動く座標系で見たときの, 中心<sup>線</sup>からの分岐流線である。渦レイノルズ数は 10 と 1 の間にあり,  $R$  の約  $1/100$  であることがわかる。



1 (X)



3 (X)



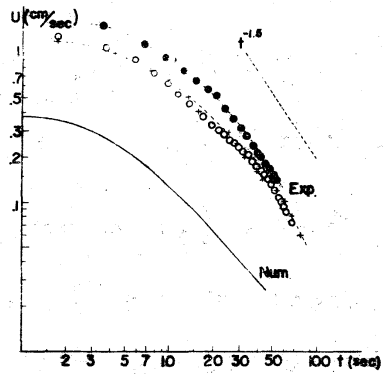
2 (X)

2図の

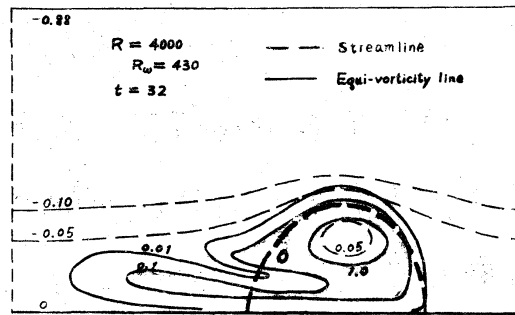
3図には渦輪に関する諸物理量の時間変化が示されている。  $E$  は全運動エネルギー,  $P$  は2図の境界線に沿う循環,  $P$  は (5) で定義された  $P$  の  $x$  成分である。  $t$  が大きくなると, これらの量がものあるべき乗で表わされる傾向が示されている。

4図は上記の数値実験で得られた渦輪の速度を, 水中での実測値(実験)および渦輪の終状態について理論的に得られた結果とを比較したもの(両対数図)である。図のため横両軸に示された単位は実験に対するもので, 他は任意のスケールである。実験では渦巻きの中の位置の測定から速度を計算した。実測値と数値実験との傾向がよく一致しているのが見られる。  $t$  が大きくなると, 理論から得られた  $t^{-1.5}$  の変化に近づくが, まだわずかに差がみられる。

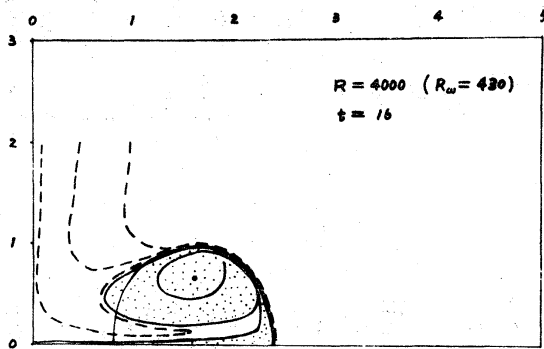
5図 (a) ~ (d) は  $R=4000$ ,  $T=2$  に対する計算で, 順に  $t=16, 24, 32, 48$  である。このばあいの本の実質線とも巻きこまれている。吹きこまれた流体の一部が渦輪の後ろに尾のような形で残されているのが見られる。これは実際の実験でも観測される現象である。これには次のような説明ができる。Saffman の公式によれば, 渦度分布が与えられると, その渦度中心はある速度で移動する。また吹きこみによって与えられた全運動量  $P$  は保存されるから,



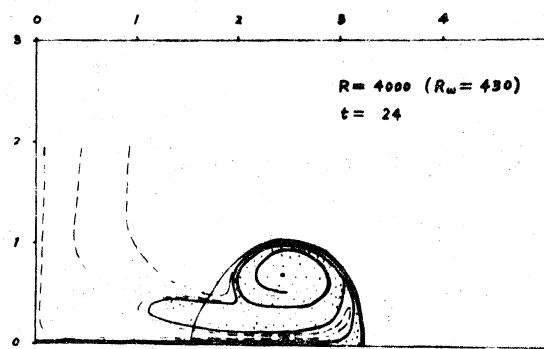
4



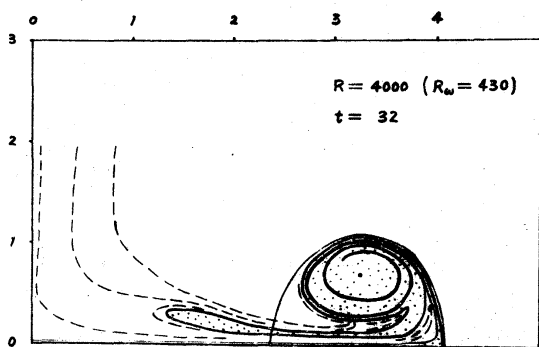
6



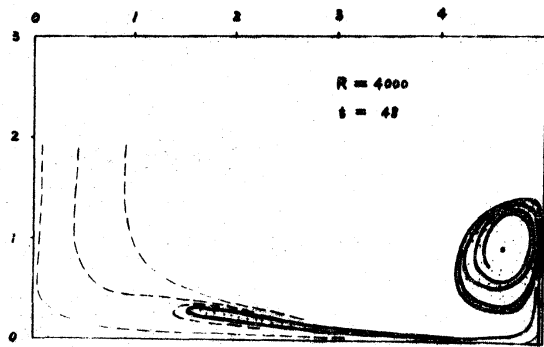
(a)



(b)



(c)



(d)

5

$P = 8\pi a^3 U_\omega$  より, 代表的大きさ  $a$  がさまり, 従ってそれからはみ出た分は後方に残されることになる。しかし渦輪には, まわりの流体の一部が取りこまれて (entrainment) 移動していく。図5dは shear stress ゼロの壁との衝突の様子を示している。これは2つの渦の正面衝突に対応している。(a)~(d)の渦レイノルズ数は約400で $R$ の約1/10である。

6図は5c図に対する等渦度線と,  $U_\omega$  で動く座標系でみた流線である。尾に残された流体と共に渦度も残されることを示している。

4図の実験データはお茶の水大学の阿阪研究室から直接いただいたもので, ここで感謝の意を表させていただきます。

### 参考文献

- [1] Batchelor, G.K. 1967 'An Introduction to Fluid Dynamics', Cambridge University Press.
- [2] Fraenkel, L.E. 1972 J.F.M. 51 119-135.
- [3] Norbury, J. 1973 J.F.M. 57 417-431.
- [4] Saffman, P.G. 1970 Studies Appl. Math. 49

371 - 380.

[5] Maxworthy, T. 1972 J. F. M. 51 15-32.

[6] Phillips, O.M. 1956 Proc. Camb. Phil. Soc. 52  
135 - 151.

[7] Pearson, C.E. 1965 J. F. M. 21 611-622.



数理解析研究所講究録 218  
 連統体力学における非線型方程式  
 の近似解法  
 正誤表

[誤]

[正]

P42 上から4行目

式の一部

$$\nu \nabla^2 (\chi \times \omega - 2u) \longrightarrow \nu \nabla^2 (\chi \times \omega + 2u)$$

P43 上から1行目

式の一部

$$P/8\pi \longrightarrow P/2\pi$$